La fonction logarithme népérien (TSTI2D)

(1) La fonction logarithme népérien

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$, mais on ne peut la décrire à partir d'aucune opération sur les fonctions usuelles déjà connues.
En effet, $\frac{1}{x} = x^{-1}$ ne peut pas correspondre à une forme nx^{n-1} puisque dans ce cas on devrait avoir $n-1=-1$ c'est-à-dire $n=0$ et donc $nx^{n-1}=0$ qui n'est clairement pas l'expression d'une primitive de la fonction inverse.

On appelle fonction **logarithme népérien,** notée **ln,** la primitive de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

(2) Etude de la fonction logarithme népérien

Propriétés

[1] La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

[2] La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Pour tous $a \in]0;+\infty[$ et $b \in]0;+\infty[$, $a<b$ équivaut à $\ln(a)<\ln(b)$
Pour tous $a \in]0;+\infty[$ et $b \in]0;+\infty[$, $a \leq b$ équivaut à $\ln(a) \leq \ln(b)$
Pour tous $a \in]0;+\infty[$ et $b \in]0;+\infty[$, $a=b$ équivaut à $\ln(a)=\ln(b)$

Démonstrations

[1] Puisque la fonction logarithme népérien est une primitive de la fonction inverse, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

[2] Pour $x \in]0;+\infty[$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Remarque facultative :

La fonction ln est dérivable seulement sur $]0;+\infty[$, mais la formule $\frac{1}{x}$ définissant la fonction dérivée a un sens sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. Ce contre exemple prouve que le domaine de dérivabilité d'une fonction n'est pas la même chose que le domaine de définition de la formule de la fonction dérivée.

Valeurs remarquables et limites

[1] $\ln(1)=0$

[2] $\ln(e)=1$ où $e \approx 2{,}718$ est une constante appelée **nombre d'Euler** ou **constante de Néper**

[3] $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

[4] $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

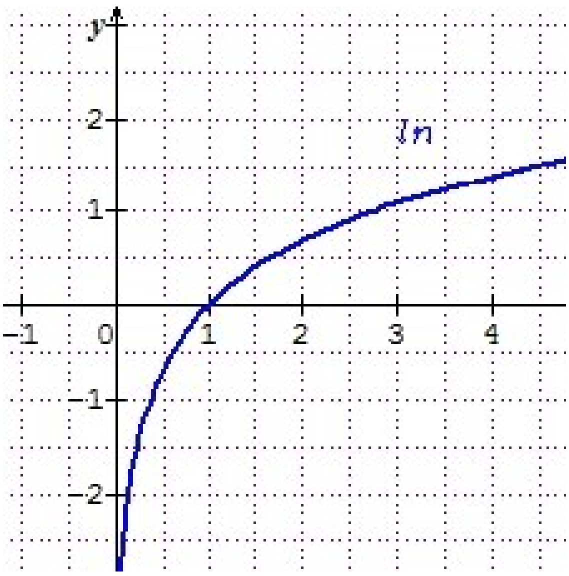

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	
$\ln(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$		$+$	

Théorème de dérivation des fonctions composées (cas particulier)

Si u désigne une fonction dérivable sur un intervalle *I*, telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$

alors la fonction composée $f = \ln(u)$ est dérivable sur *I* avec $f' = \dfrac{u'}{u}$

(3) Propriétés algébriques des logarithmes

Définition

Soit $a \in \left]0\,;+\infty\right[$ tel que $a \neq 1$

La fonction logarithme de base *a* est définie pour $x \in \left]0;+\infty\right[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Remarque :

$\log_e = \ln$ et le logarithme décimal $\log_{10}$ se note simplement $\log$

Soient $a \in \left]0\,;+\infty\right[$ avec $a \neq 1$, $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $y \in \left]0\,;+\infty\right[$ et $n \in \mathbb{R}$

n désigne en général un exposant entier mais d'après la définition précédente, ce peut être un nombre réel.

	Formule pour le logarithme népérien	Formule pour un logarithme
[1]	$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$	$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
[2]	$\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$	$\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
[3]	$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
[4]	$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$	$\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\log_a(x)$
[5]	$\ln(x^n) = n\ln(x)$	$\log_a(x^n) = n\log_a(x)$

(4) Calculs de limites

Théorème dit « des croissances comparées »

Soit $n \in IN^*$

[1] $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$

[2] $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$

Remarque :

Contrairement à ce que suggère son nom, ce théorème n'a aucun rapport avec les sens de variations !

De manière intuitive, il dit que dans les cas de formes indéterminées, les limites des polynômes et celle de l'exponentielle (pure) l'emporte sur la limite des logarithmes (purs)